

PENYELESAIAN SEMIFINAL TOP-COP 2014 TINGKAT-SMA

1. (a) Gaya gesek diberikan oleh

$$f = \frac{\mu_k N}{4} = \frac{\mu_k Mg \cos \theta}{4} \quad (1)$$

persamaan gaya translasi dari sistem bus

$$4f - Mg \sin \theta = Ma \quad (2)$$

substitusi persamaan 1 ke 2 untuk mendapatkan

$$4 \left(\frac{\mu_k Mg \cos \theta}{4} \right) - Mg \sin \theta = Ma \longrightarrow a = (\mu_k \cos \theta - \sin \theta) g$$

Untuk kondisi tanpa slip maka kecepatan bus harus memenuhi persamaan $v = \omega R$

$$v = at = \omega R \longrightarrow t = \frac{\omega R}{a} = \frac{\omega R/g}{\mu_k \cos \theta - \sin \theta}$$

waktu yang dibutuhkan

$$\therefore t = \frac{\omega R/g}{\mu_k \cos \theta - \sin \theta}$$

- (b) Anggap gaya gesek saat itu f' . Persamaan gaya mendatar arah gerak bus diberikan oleh

$$4f' - Mg \sin \theta = 0 \longrightarrow f' = \frac{Mg \sin \theta}{4}$$

persamaan momen gaya

$$\tau_0 - f'R = 0 \longrightarrow \tau_0 = \frac{MgR \sin \theta}{R}$$

- (c) Persamaan gaya mendatar arah gerak bus diberikan oleh

$$4f'' - Mg \sin \theta = Ma''$$

persamaan momen gaya diberikan oleh

$$\tau - f''R = \beta m R^2 \alpha''$$

jika sistem tidak selip maka percepatan harus memenuhi persamaan $a'' = \alpha'' R$ dari sini didapati percepatan bus adalah

$$a'' = \frac{\left(\frac{4\tau}{R} \right) - Mg \sin \theta}{M + \beta m}$$

kelajuan sistem diberikan oleh

$$v(t) = \omega R + \left[\frac{(4\tau/R) - Mg \sin \theta}{M + \beta m} \right] t$$

- (d) persamaan gaya translasi

$$6F - Mg \sin \theta + 4f''' = Ma_b \quad (3)$$

persamaan gaya rotasi pada ban

$$\tau_b - f'''R = \beta m R^2 \alpha \quad (4)$$

sementara hubungan tanpa slip diberikan oleh $a_b = \alpha_b R$ dari persamaan 3, 4, dan hubungan tanpa selip diberikan nilai percepatan

$$a_b = \frac{6F - Mg \sin \theta + \left(\frac{4\tau_l}{R} \right)}{M + \beta m}$$

sementara untuk kasus n buah katrol diberikan percepatan bus

$$a_n = \frac{2nF - Mg \sin \theta + \left(\frac{4\tau_l}{R} \right)}{M + \beta m}$$

2. (a) Dari hukum kekekalan momentum dan energi mekanik, momentum total dan energi total dari dua massa titik pada saat waktu t adalah sama pada saat waktu $t = 0$ sesaat setelah impuls mengenai massa titik:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}, \quad E = \frac{P^2}{2m} = \frac{I^2}{2m}$$

- (b) Sistem memiliki massa total $2m$, momentum total I , sehingga pusat massa dari sistem memiliki kecepatan

$$v_c = \frac{I}{2m}$$

Sesaat setelah impuls diberikan, momentum sudut dari sistem terhadap pusat massa adalah $L = \frac{Il}{2}$. Dengan hukum kekekalan momentum sudut pada kerangka pusat massa, L adalah momentum sudut terhadap pusat massa untuk waktu selanjutnya.

- (c) Misalkan l_M menyatakan jarak pisah maksimum yang dibutuhkan. Hukum kekekalan momentum sudut dan energi mekanik

$$2m \left(\frac{l_M}{2} \right)^2 \dot{\varphi} = \frac{Il}{2},$$

$$m \left(\frac{l_M}{2} \dot{\varphi} \right)^2 + m \left(\frac{I}{2m} \right)^2 + \frac{1}{2} K (l_M - l)^2 = \frac{I^2}{2m}$$

memberikan

$$2mKl_M^4 - 4mKll_M^3 + (2mKl^2 - I^2)l_M^2 + I^2l^2 = 0$$

yang mana akar riil positif adalah jarak maksimum antara dua massa titik selama pergerakan setelah diberikan impuls.

- (d) Misalkan x menyatakan jarak antara dua massa tersebut. Hukum kekekalan energi mekanik memberikan

$$\frac{1}{2} \cdot 2m \left[\left(\frac{x}{2} \dot{\varphi} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot 2m \left(\frac{I}{2m} \right)^2 + \frac{1}{2} K (x - l)^2 = \frac{I^2}{2m}$$

atau

$$\frac{m}{4} (x^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{2} K (x - l)^2 = \text{konstan}$$

menunjukkan bahwa ketika $x = l$, energi kinetik dari dua massa titik, diberikan oleh suku pertama pada ruas kiri persamaan di atas. Hal ini merupakan kasus saat $t = 0$. Juga, saat $t = 0$, hanya massa yang diberikan impuls yang memiliki kecepatan ketika massa lain masih diam sesaat setelah massa pertama diberi impuls. Jadi massa pertama mendapat suatu kecepatan maksimum

$$v_M = \frac{I}{m}$$

pada saat $t = 0$

Syarat bahwa $x = l$ dapat dipenuhi lagi dari waktu ke waktu. Namun, saat kecepatan dari massa titik pertama tidak nol, massa kedua tidak akan dapat kecepatan maksimum. Sehingga kecepatan maksimum yang dapat diraih oleh massa kedua adalah kurang dari v_m .

3. (a) Dari hukum termodinamika kesatu dan kedua, kita mempunyai

$$Q_1 = P + Q_2, \quad Q_2/T_2 = Q_1/T_1.$$

Sehingga

$$\frac{Q_2}{P} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

- (b) Pada saat setimbang, panas yang masuk menuju rumah adalah sama dengan panas yang dialirkan keluar rumah, yaitu $Q_2 = A(T_1 - T_2)$. Kita

peroleh, menggunakan hasil di bagian (a)

$$\frac{T_2 P}{T_1 - T_2} = A(T_1 - T_2)$$

Sehingga

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{P}{A} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{A} \right)^2 + 4T_1 \frac{P}{A}} \right)$$

Dengan melihat kenyataan bahwa $T_2 < T_1$, penyelesaiannya adalah

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{P}{A} - \sqrt{\left(\frac{P}{A} \right)^2 + 4T_1 \frac{P}{A}} \right)$$

- (c) Ketika pendingin ruangan beroperasi selama waktu 30% dari periode siklus *on-off* termostat. Kita tahu dari bagian (b)

$$P_{30\%} = A \cdot \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_2} = A \cdot \frac{10^2}{293} = A \cdot \frac{100}{293}$$

Ketika pendingin ruangan melanjutkan operasionalnya, kita mempunyai

$$P = P_{30\%} \cdot \frac{100}{30} = A \cdot \frac{100}{30} \cdot \frac{100}{293} = 1.1377 A$$

Dengan nilai $T_2 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$, kita dapatkan

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 + \sqrt{T_2 \frac{P}{A}} = 293 + \sqrt{\frac{100^2}{30}} \\ &= 293 + 18.26 \text{ K} = 311.26^\circ\text{C} \end{aligned}$$

- (d) Ketika siklus dibalik pada musim dingin, kita mempunyai persamaan $Q_2 = P + Q_1$ dan $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$. Pada saat setimbang, $Q_2 = A(T_2 - T_1)$, sehingga

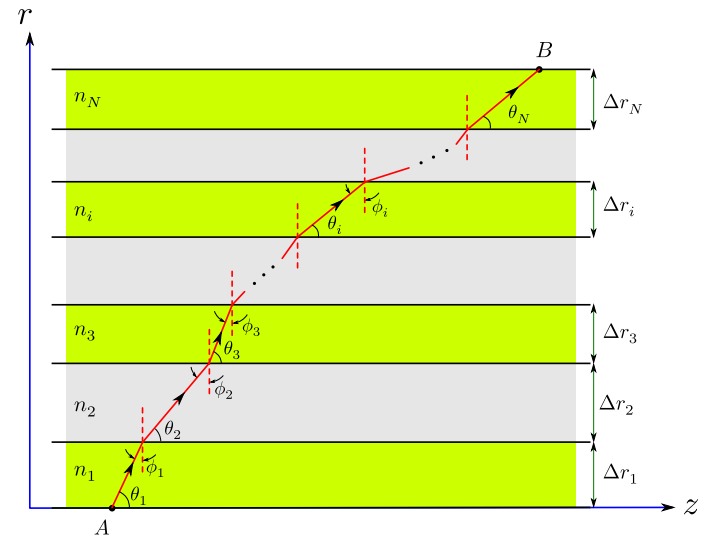
$$T_2 - T_1 = \sqrt{T_2 \frac{P}{A}}$$

$$\text{Jadi } T_1 = T_2 - \sqrt{\frac{P}{A} T_2} = 293 - (1.14 \times 293)^{1/2} = 275 \text{ K} = 2^\circ\text{C}$$

4. (a) Hukum Snell untuk Gambar 1 adalah

$$\begin{aligned} n_1 \sin \phi_1 &= n_2 \sin \phi_2 \\ &= n_3 \sin \phi_3 \\ &= \dots \\ &= n_i \sin \phi_i \\ &= \dots \\ &= n_N \sin \phi_N \\ &= \text{konstan} \end{aligned}$$

Karena, $\cos \theta_i = \sin \phi_i$, kita dapatkan kaitan n_i dan θ_i



Gambar 1: Jalannya sinar yang melewati indeks berlapis N .

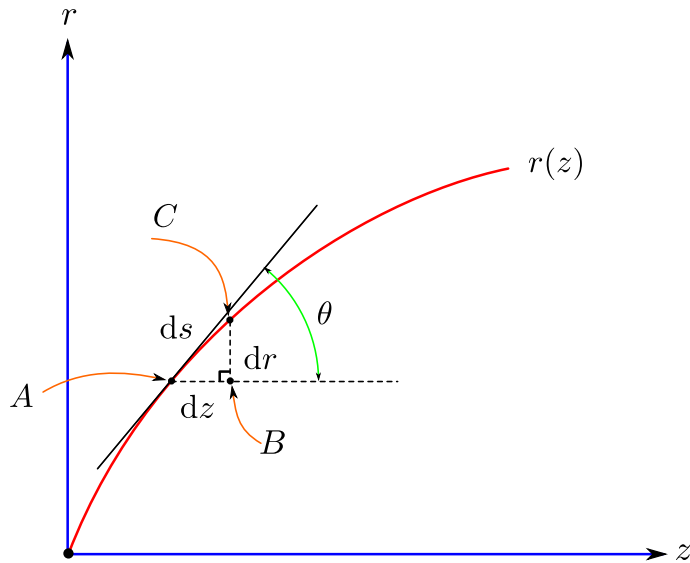
$$n_i \cos \theta_i = \beta$$

dengan β merupakan suatu tetapan dan $i = 1, 2, \dots, N$

- (b) Disebabkan untuk $\Delta r_i \rightarrow 0$ diketahui bahwa $n_i \rightarrow n(r)$ dan $\theta_i \rightarrow \theta(r)$. Maka digabungkan dengan hasil di bagian (a), kita dapatkan

$$n(r) \cos \theta(r) = \beta$$

- (c) Menggunakan teorema Pythagoras aturan trigonometri kosinus di segitiga ABC pada Gambar 2 didapatkan



Gambar 2: Kurva $r(z)$.

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (dz)^2$$

;

$$\cos \theta = \frac{dz}{ds}$$

- (d) Kita gabungkan hasil yang diperoleh dari bagian (b) dan (c). Dengan sedikit manipulasi aljabar didapatkan

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dr)^2 + (dz)^2 \\ \left(\frac{ds}{dz}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{\cos \theta}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 \\ \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 &= \left[\frac{n(r)}{\beta}\right]^2 - 1 \end{aligned}$$

- (e) Kita turunkan hasil dari bagian (d) terhadap z , kita akan memperoleh persamaan sinar

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 &= \frac{d}{dz} \left\{ \left[\frac{n(r)}{\beta}\right]^2 - 1 \right\} \\ 2 \left(\frac{dr}{dz}\right) \frac{d^2r}{dz^2} &= \frac{1}{\beta^2} \frac{dn^2(r)}{dz} \\ 2 \left(\frac{dr}{dz}\right) \frac{d^2r}{dz^2} &= \frac{1}{\beta^2} \frac{dn^2(r)}{dr} \frac{dr}{dz} \\ \frac{d^2r}{dz^2} &= \frac{1}{2\beta^2} \frac{dn^2(r)}{dr} \end{aligned}$$

- (f) Pertama kita hitung terlebih dahulu

$$\begin{aligned} \frac{dn^2(r)}{dr} &= \frac{d}{dr} \left\{ n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \right\} \\ &= n_1^2 \left[0 - 4\Delta \left(\frac{r}{a}\right) \frac{1}{a} \right] \\ &= -\frac{4\Delta n_1^2 r}{a^2} \end{aligned}$$

Sehingga dengan persamaan sinar untuk indeks bias yang diberikan pada

soal adalah

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r}{dz^2} &= \frac{1}{2\beta^2} \left(-\frac{4\Delta n_1^2 r}{a^2} \right) \\ \frac{d^2 r}{dz^2} + \left(\frac{2\Delta n_1^2}{\beta^2 a^2} \right) r &= 0 \\ \frac{d^2 r}{dz^2} + \Gamma^2 r &= 0\end{aligned}$$

dimana $\Gamma = n_1 \sqrt{2\Delta}/(\beta a)$. Lalu menggunakan petunjuk yang diberikan pada soal kita dapatkan penyelesaiannya

$$r(z) = r_A \sin(\Gamma z) + r_B \cos(\Gamma z)$$

Nilai r_A dan r_B dicari dengan dua syarat awal, yaitu sebagai berikut

i. syarat awal I: $r(0) = 0$

$$\begin{aligned}r(0) &= r_A \sin(0) + r_B \cos(0) \\ 0 &= r_B\end{aligned}$$

ii. syarat awal II: $\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z=0} = \tan \theta_1$

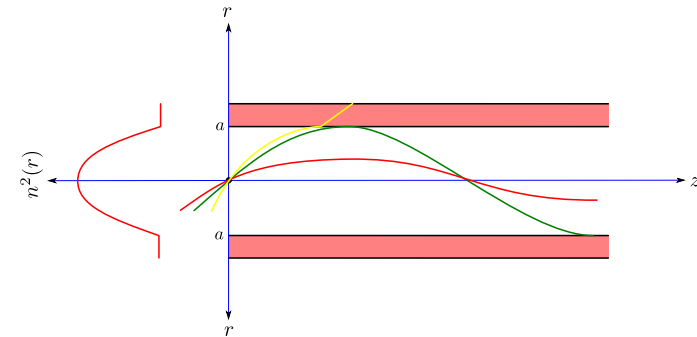
$$\begin{aligned}\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z=0} &= \Gamma [r_A \cos(0) - r_B \sin(0)] \\ \tan \theta_1 &= \Gamma r_A \\ r_A &= \frac{\tan \theta_1}{\Gamma} \\ &= \frac{\beta a}{n_1 \sqrt{2\Delta}} \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \\ &= \frac{\beta a \sin \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 \sqrt{2\Delta}} \\ &= \frac{a \sin \theta_1}{\sqrt{2\Delta}}\end{aligned}$$

dimana kita telah menggunakan kaitan dari hasil di bagian a) $n_i \cos \theta_i = \beta$.

Dari hasil substitusi dua syarat tersebut ke dalam persamaan $r(z)$, kita temukan penyelesaian akhir $r(z)$ di wilayah inti

$$r(z) = \frac{a \sin \theta_1}{\sqrt{2\Delta}} \sin \left(\frac{n_1 \sqrt{2\Delta}}{\beta a} z \right)$$

(g) Dari hasil di bagian (f) terlihat $r(z)$ merupakan fungsi sinusoidal sehingga lintasan dari cahaya akan dirambatkan mengikuti kurva sinusoidal. Karena $n^2(r)$ merupakan fungsi kuadrat di bagian inti dan di bagian man-



Gambar 3: Sketsa lintasan dari sinar yang merambat melalui .

tel merupakan fungsi konstan maka diperoleh kurva $n^2(r)$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3

(h) Dari hasil (d) kita dapatkan syarat nilai β yang diperbolehkan agar $r(z)$ memiliki penyelesaian, yaitu dr/dz bernilai riil.

$$\begin{aligned}\left[\frac{n(r)}{\beta} \right]^2 - 1 &\geq 0 \\ \beta &\leq n(r)\end{aligned}$$

Dari soal diketahui bahwa fungsi $n(r)$ memiliki dua nilai minimum (saat $r = a$) dan maksimum (saat $r = 0$), lihat hasil di bagian (g) pada kurva $n^2(r)$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
 n_2 &\leq \beta \leq n_1 \\
 n_2 &\leq n(r) \cos \theta(r) \leq n_1 \\
 n_2 &\leq n_1 \cos \theta_1 \leq n_1 \\
 n_2 &\leq n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} \leq n_1 \\
 n_2 &\leq \sqrt{n_1^2 - (n_1 \sin \theta_1)^2} \leq n_1 \\
 n_2 &\leq \sqrt{n_1^2 - (n_0 \sin \alpha)^2} \leq n_1 \\
 n_2^2 &\leq n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha \leq n_1^2 \\
 n_2^2 - n_1^2 &\leq -n_0^2 \sin^2 \alpha \leq 0 \\
 0 &\leq n_0^2 \sin^2 \alpha \leq n_1^2 - n_2^2 \\
 0 &\leq \sin \alpha \leq \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_0^2}} \\
 0 &\leq \alpha \leq \arcsin \left(\sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_0^2}} \right)
 \end{aligned}$$

Pada perhitungan di atas kita tinjau $r = 0$ sebab kita ingin menghitung nilai α . Dengan menganggap bahwa n_0 adalah indeks bias udara (lingkungan luar dari serat optik) yang bernilai $n_0 = 1$, maka didapatkan

$$0 \leq \alpha \leq \arcsin \left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right)$$

- (i) Dari hasil di bagian (h) dan bagian (g) saat $\alpha = \alpha_{\text{maks}}$ kita dapatkan $\theta = \theta_{\text{maks}}$. Sehingga

$$\begin{aligned}
 n_0 \sin \alpha_{\text{maks}} &= n_1 \sin \theta_{\text{maks}} \\
 \theta_{\text{maks}} &= \arcsin \left(\frac{n_0}{n_1} \sin \alpha_{\text{maks}} \right)
 \end{aligned}$$

Sedangkan untuk θ_{min} terjadi saat $\alpha = \alpha_{\text{min}} = 0$. Oleh karena itu kita dapatkan kemungkinan nilai θ di dalam serat optik adalah

$$0 \leq \theta \leq \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} \right)$$

5. (a) Flux total yang disapu oleh batang yaitu

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

sementara $\mathbf{B} = -B\hat{\mathbf{z}}$ dan $d\mathbf{A} = r dr d\phi \hat{\mathbf{z}}$ maka flux medan magnet yang melalui bagian yang disapu oleh batang

$$\begin{aligned}
 \Phi &= -B \int_a^b r dr \int_0^\theta \\
 &= -\frac{B(b^2 - a^2)}{2} \theta
 \end{aligned}$$

ggl induksi yang dihasilkan

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{B(b^2 - a^2)}{2} \omega$$

dengan menjadikannya satu rangkaian maka akan didapatkan arus listrik dari persamaan

$$\epsilon = IR \longrightarrow I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{B(b^2 - a^2)}{2R} \omega$$

(b) Jika ditambahkan dengan kapasitor maka persamaan rangkaian menjadi

$$\epsilon = \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C}$$

rangkai persamaan di atas menjadi

$$\left(\epsilon - \frac{1}{C}Q\right) = \frac{dQ}{dt}R$$

anggap $f = \left(\epsilon - \frac{1}{C}Q\right)$ sehingga $\frac{dQ}{dt} = -C \frac{df}{dt}$ sehingga didapatkan persamaan

$$-\frac{1}{RC}dt = \frac{df}{f}$$

integrasikan menjadi

$$f = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

masukkan lagi nilai f didapatkan

$$Q(t) = C \left[\epsilon - A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]$$

masukkan nilai syarat batas $Q(0) = 0$ maka $A = \epsilon$ sehingga didapatkan persamaan umum

$$Q(t) = C\epsilon \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]$$

saat baterai terisi 70% maka didapatkan

$$t = -RC \ln(0,3)$$